Logikai kalkulusok egységes tárgyalása, és alkalmazása az oktatásban

Kádek Tamás

Témavezető:
Dr. Várterész Magda

Mérföldkövek

- Matematikai logika példatár / Kádek Tamás, Robu Judit, Várterész Magda
  Cluj-Napoca : Presa Universitara Clujeana, 2010
- Gentzen-levezetések generálása oktatási célú számítógépes támogatással
  SzámOkt 2011 (20.) (2011) (Cluj-Napoca, Románia). - SzámOkt 2011: XX. Nemzetközi számítástechnika és oktatás konferencia. - p. 136-139.
- Press-ready Deduction Trees in Classical Logic Using Point-Plus-Expressions
  Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Section Computatorica. - 37 (2012), p. 229-238. -
  Zbl 1249.03003

A GenTreeCad alkalmazás jellemzői

- a formulák megadása a GenTreeCad alkalmazáson belül a LaTeX rendszerben megszokott képletek formájában történik, ennek előnye, hogy a kidolgozott LaTeX anyagokból egyszerűen átemelhető,
- a formulát az alkalmazásban szerkezeti fájának segítségével tároljuk, mely további feldolgozásokat tesz lehetővé,
- a formulák a kimeneten PDF formájában jelennek meg, így nincs szükség további grafikus utófeldolgozásra (ha szükséges a közbenső METAPOST és LaTeX források is elérhetők),
- a bemenet (a formula) célszerűen szintén LaTeX képlet.

GenTreeCad alkalmazás

Példa, az alkalmazás futtatásának eredménye:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X, Y \to X}{X \to Y \supset X}}{\to \neg X, Y \supset X} \qquad \dfrac{\dfrac{Y \to Y, X}{\to Y, Y \supset X}}{\neg Y \to Y \supset X}}{\neg X \supset \neg Y \to Y \supset X}}{\to (\neg X \supset \neg Y) \supset (Y \supset X)}$$

Egységes tárgyalás – Pont-plusz-kifejezések ítéletlogikában

Ha A egy formula, úgy

- tA és
- fA

is **címkézett formula**.
A **pont-plusz-kifejezések** $\mathcal{P}$ halmaza a legszűkebb olyan halmaz, mely tartalmazza a következőket:

- címkézett formulák,
- valamint, ha $P_1 \in \mathcal{P}, P_2 \in \mathcal{P}, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ $(n \geqslant 2)$, akkor
  - $(P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n)$ és
  - $(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$ kifejezéseket.

Átírási algoritmus

Legyen C ítéletlogikai formula. Definiáljuk a C formula pp-kifejezés alakját az alábbi szabályok használatával, a fC címkézett formulából. Addig alkalmazzuk a szabályokat, míg van olyan címkézett formula a pp-kifejezésben, melynek fő logikai összekötőjele $\wedge$ vagy $\vee$ vagy $\neg$. (A és B formulákat jelöl).

1. $fA \wedge B \Rightarrow fA + fB$,
2. $fA \vee B \Rightarrow fA \circ fB$,
3. $f\neg A \Rightarrow tA$.

Tulajdonképpen az átírási algoritmus alkalmazásával csak helyettesítettük a konjunkciókat, diszjunkciókat és negációkat a $+$, a $\circ$, és a t szinbólummal. Megjegyzendő, hogy ha C konjunktív normál forma volt, akkor az algoritmus kimenete logikai összekötőjelek nélküli pp-kifejezés.

Pont-plusz rezolúció

A pp-rezolúció axiómasémája:

$$fX + tX \quad \text{és} \quad \Gamma + fX + tX$$

ahol Γ egy elemi plusz normál forma, és X egy propozícionális betű.
A Pont-plus rezolúció kiterjesztési szabálya:

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta}{\Delta_1 + \Delta_2} \quad \text{és} \quad \frac{\Gamma + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta}{\Gamma + \Delta_1 + \Delta_2}$$

ahol Γ egy elemi plusz normál forma. Δ_1 és Δ_2 elemi pont láncok, melyek pontosan egy azonos propozícionális betűt tartalmaznak ellentétes címkével. Jelölje X ezt a propozícionális betűt! Ez esetben, Δ egy elemi pont lánc Δ_1 és Δ_2 címkézett elemeiből, kivéve a tX és fX címkézett formulákat.

A **tn-interpretáció** mint formális nyelv:

1. $(fA_1 \circ fA_2 \circ \cdots \circ fA_k) \Rightarrow f(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k)$, ahol $k \geqslant 2$,
2. $(fA_1 + fA_2 + \cdots + fA_k) \Rightarrow f(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k)$, ahol $k \geqslant 2$,
3. $tA \Rightarrow f\neg A$ ahol A egy formula.

Végeredményképpen, egy fA formula keletkezik, ahol A a tn-interpretáció által generált formula.
A **fn-interpretáció** mint formális nyelv:

1. $fA \Rightarrow t\neg A$ ahol A egy formula,
2. $(tA_1 \circ tA_2 \circ \cdots \circ tA_k) \Rightarrow t(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k)$, ahol $k \geqslant 2$,
3. $(tA_1 + tA_2 + \cdots + tA_k) \Rightarrow t(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k)$, ahol $k \geqslant 2$.

Végeredményképpen, egy tA formula keletkezik, ahol A a fn-interpretáció által generált formula.

Pont-plusz rezolúció

$$fZ + (fX \circ tY) + (fY \circ tZ) + (tX \circ tZ) + (fX \circ tZ) + fX + tX$$

		tn-interpretáció	fn-interpretáció	
1.	fZ	1. Z	1. $\neg Z$	
2.	$fX \circ tY$	2. $X \vee \neg Y$	2. $\neg X \wedge Y$	
3.	$fY \circ tZ$	3. $Y \vee \neg Z$	3. $\neg Y \wedge Z$	
4.	$tX \circ tZ$	4. $\neg X \vee \neg Z$	4. $X \wedge Z$	
5.	$fX \circ tZ$	5. $X \vee \neg Z$	5. $\neg X \wedge Z$	(2; 3)
6.	fX	6. X	6. $\neg X$	(1; 5)
7.	tX	7. $\neg X$	7. X	(1; 4)
		8. üres klór	8. üres duális klóz	(6; 7)

Pont-plusz szekvent

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \cdots, A_n \to B_1, B_2, \cdots, B_m \quad \sim \\ \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m \end{aligned}$$

Ha eltávolítjuk az átírási algoritmus első szabályát (a cimkézett konjunkciók eltávolítási szabályát), akkor a fenti formula pp-kifejezés alkaja egy pont lánc. Az áttekinthetőség kedvéért feltételezzük hogy B_i $(i = 1, \cdots, m)$ nem tartalmaz diszjunkciót.

$$\begin{aligned} f\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m \quad \Rightarrow \\ tA_1 \circ tA_2 \circ \cdots \circ tA_n \circ fB_1 \circ fB_2 \circ \cdots \circ fB_m \end{aligned}$$

Ekkor a fenti pp kifejezés tn-interpretációja egybeesik a szekvent formula alakjával.

Egy bizonyítás készítése közben több szekventen is dolgozunk párhuzamosan, melyeket most gyűjtsük össze $+$ jellel elválasztva egy listába. Ekkor az így kapott lista továbbra is pp kifejezés.

A pp szekvent kalkulus axiómasémája egy plusz lánc, mely pont láncokból épül fel:

$$fA \circ tA \quad \text{or} \quad \gamma \circ fA \circ tA$$

ahol γ egy pont lánc, A pedíg tetszőleges formula.

Szekvent kalkulus

A pp szekvent kalkulus levezetési szabályai:

$$\frac{(fA \circ \gamma) + (tB \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(tA \supset B \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k} \qquad \frac{(tA \circ fB \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(fA \supset B \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}$$

$$\frac{(fA \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(t\neg A \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k} \qquad \frac{(tA \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(f\neg A \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}$$

$$\frac{(tA \circ tB \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(tA \wedge B \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k} \qquad \frac{(fA \circ \gamma) + (fB \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(fA \wedge B \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}$$

$$\frac{(tA \circ \gamma) + (tB \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(tA \vee B \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k} \qquad \frac{(fA \circ fB \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}{(fA \vee B \circ \gamma) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k}$$

ahol γ_i $(i = 1, \cdots, k)$ egy-egy pont lánc, $k \geqslant 0$, továbbá γ opcionális pont lánc.

Az előbbi levezetési szabályok esetében a tn-interpretáció épp a Gentzen-féle szekvent kalkulus levezetési szabályait generálja, következésképp a pp szekvent kalkulus helyes.

$$\text{Példa:}\quad (\neg X \supset \neg Y) \supset (Y \supset X)$$

1. $f(\neg X \supset \neg Y) \supset (Y \supset X)$
2. $t\neg X \supset \neg Y \circ fY \supset X$
3. $f\neg X \circ fY \supset X + t\neg Y \circ fY \supset X$
4. $tX \circ fY \supset X + t\neg Y \circ fY \supset X$
5. $tX \circ fY \supset X + fY \circ fY \supset X$
6. $tX \circ tY \circ fX + fY \circ fY \supset X$
7. $tX \circ tY \circ fX + fY \circ tY \circ fX$

Az előbbi példa bináris fa reprezentációja:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{tX \circ tY \circ fX}{tX \circ fY \supset X}}{f\neg X \circ tY \supset X} \qquad \dfrac{\dfrac{fY \circ tY \circ fX}{fY \circ fY \supset X}}{t\neg Y \circ fY \supset X}}{t\neg X \supset \neg Y \circ fY \supset X}}{f(\neg X \supset \neg Y) \supset (Y \supset X)}$$

Tabló kalkulus

- A redukált (konjunkció eltávolítás nélküli) átírási szabály és a tn-interpretáció lehetőséget adott arra, hogy pp szekvent kalkulus levezetések segítségével generáljunk szekventkalkulusbéli levezetést,
- a pp-rezolúció esetén az fn-interpretáció duális kalkulust generált,
- most pedig a pp szekvent kalkulus fn-interpretációja segítségével a tabló módszerhez jutunk:

$$\frac{fA + tB}{tA \supset B} \quad \Rightarrow \quad \frac{fA;\ tB}{tA \supset B} \qquad\qquad \frac{tA \circ fB}{fA \supset B} \quad \Rightarrow \quad \frac{\begin{matrix} tA \\ fB \end{matrix}}{fA \supset B} \quad \ldots$$

A pp szekvent kalkulus levezetésének miden lépése a tabló megoldatlan jelölt formuláit gyűjti össze. Az egyes ágakat $+$ választja el, míg a megoldatlan jelölt formulákat $\circ$ szeparálja.

$$
\begin{tikzcd}
 & f(\neg X \supset \neg Y) \supset (Y \supset X) \arrow[d] & \\
 & t\neg X \supset \neg Y \arrow[d] & \\
 & fY \supset X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f\neg X \arrow[d] & & t\neg Y \arrow[d] \\
tX \arrow[d] & & fY \arrow[d] \\
tY \arrow[d] & & tY \arrow[d] \\
fX & & fX
\end{tikzcd}
$$

Hivatkozások

Dragálin, A. G., *On a self-dual notation in automated reasoning*, Technical Report No 96/16, Debrecen, 1996.

Toelstra, A. S. and **Schwichtenberg, H.**, *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Fitting, M., *First-order logic and automated theorem proving*, Springer, 1996.

Stachniak, Z., *Resolution Proof Systems: An Algebraic Theory*, Kluwer Academic Publishers, York University, North York, Canada, 1996.

Pásztor Varga, K. and **Várterész, M.**, *A generalized approach to the theorem proving methods* in Proc. of 5th International Conference on Applied Informatics, pp. 191-200, Eger, 2001.

Pásztor Varga, K. and **Várterész, M.**, *Comparison and Usability of two Rewriting Systems for Theorem Proving*, Pure Mathematics and Applications, Volume 13, No. 1-2, pp. 293-302, Budapest-Siena, 2002.

Köszönöm a figyelmet!

Kádek Tamás
web.: www.inf.unideb.hu/~kadek
email.: kadek.tamas@inf.unideb.hu
tel.: 36 52 512 900 / 75230